$$f(x,y) = 16y^2 - 4x + 10$$

$$\varphi(t) = (0,0) + t(1,1) =$$

$$= (0,0) + (t,t) =$$

$$= (t,t)$$

$$f(\varphi(t)) =$$

$$f((t,t)) = f(t,t) = 16t^2 - 4t + 10$$

1b) * $f(x,y) = 3x+4y+15 = C$ $y = \frac{C-15-3x}{4}$

množina $\{(x,y) : \quad \}$, $C \in \mathbb{R}$

* $f(x,y) = e^{3x+4y+15} = 2 > 0$

$$e^{3x+4y+15} = 2$$

$$3x+4y+15 = \ln 2$$

$\{(x,y) : 3x+4y+15-\ln 2 = 0\}$ ... vrstevnice C.

• $\underbrace{\sin(3x+4y+15)} \in [-1,1]$

$\{(x,y) : \quad = 1 \} = \{3x+4y+15 = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \; k \in \mathbb{Z}\}$

$\sin(3x+4y+15) = 1 \iff$

$3x+4y+15 = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$

Vrstevnice:

$$e^{x^2+y^2-25} = 2$$

$$x^2+y^2-25 = \ln 2$$

$$x^2+y^2 = \ln 2 + 25$$

$$R = \sqrt{\ln 2 + 25}$$

$f(x,y) = x^2+y^2-25$ | T_0: $x^2+y^2-25=0$

$f(x,y) = 0$

Lemma 8: Def. $f_i : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ $(i \in \{1,\dots,d\})$

$f_i : (x_1, x_2, \dots, x_d) \mapsto x_i$ tj. $f(x_1, x_2, \dots, x_d) = x_i$.

(Souřadnicová projekce (i-tá)).

Pak f je 1-lipschitzovská, a tedy spoj.

Příklad: • $h(x,y) = x^2 y$ je spoj. na $\mathbb{R}^2$.

$f_1 : (x,y) \mapsto x$ je spoj. (L8)

$f_2 : (x,y) \mapsto y$ je spoj. (L8)

$\Rightarrow$ x^2 je spoj., $x^2 \cdot y$ je spoj.

Tedy $\lim\limits_{(x,y)\to(7,5)} h(x,y) = \lim x^2 y = 7^2 5 = 245$

• $f(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2}$ ($G_f \subseteq \mathbb{R}^3$ horní 1-polosféra)

$D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1-x^2-y^2 \geq 0\} = \{x^2+y^2 \leq 1\} =: K$

f je spojitá na K (míněno vzhl. ke K)

Vnitřní fce: $\overbrace{1-x^2-y^2}^{h(x,y)}$ spoj. na $\mathbb{R}^2$ (L8 + VOAL)

spoj. (triv)

Vnější fce: $g(t) = \sqrt{t}$ spoj. na $[0,\infty)$

$f(x,y) = g \circ h(x,y) = g(h(x,y))$

$h(K) \subseteq [0,\infty)$, $f \circ g$ je spoj. na K.

Tedy $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(1,0)\\(x,y)\in K}} f(x,y) = \lim \sqrt{1-x^2-y^2} \overset{\text{spoj.}}{=} \sqrt{1-1^2-0^2} = 0$ ✓

Příklad: $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2} = 1$

(P): $\exists \delta > 0$ $\forall (x,y) \in P((0,0),\delta)$ $h(x,y) \neq 0$

VOLSF: $g(t) = \dfrac{\sin t}{t}$, $\lim\limits_{t\to 0} g(t) = \lim \dfrac{\sin t}{t} = 1$

$h(x,y) = x^2+y^2$, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} x^2+y^2 = 0$